

Задания

секция «Математика» 2014г.

1. Дорожки в зоопарке образуют равносторонний треугольник, в котором проведены средние линии. Из клетки сбежала обезьянка. Ее ловят два сторожа. Смогут ли они поймать обезьянку, если все трое будут бегать только по дорожкам, скорость обезьянки и скорости сторожей равны и они видят друг друга? Ответ обоснуйте.

2. Числа $a_1, a_2, \dots, a_{2014}$ представляют собой упорядоченные в некотором порядке числа $1, 2, \dots, 2014$. Каждое число a_k умножается на его номер k , а затем среди всех полученных 2014-ти произведений выбирается наибольшее. Доказать, что оно не меньше 1007^2 .

3. Доказать, что ни для каких чисел x, y, z не могут одновременно выполняться три неравенства

$$|x| < |y - z|, |y| < |z - x|, |z| < |x - y|.$$

4. В кодовом замке ровно три кнопки с номерами 1, 2, 3. Про код, открывающий замок, известно, что он трехзначен. Какое наименьшее число раз следует нажать на кнопки замка, чтобы он наверняка открылся? (Замок открывается, как только подряд и в правильном порядке нажаты все три цифры его кода). Ответ обоснуйте.

5. Квадратное поле разбито на 100 одинаковых квадратных участков, девять из которых поросли бурьяном. Известно, что бурьян за год распространяется на те и только на те участки, у каждого из которых не менее двух соседних участков уже поражены бурьяном (участки называются соседними, если они имеют общую сторону). Доказать, что полностью все поле бурьяном не зарастет.

6. Из точки M по плоскости с постоянной скоростью ползет муравей. Его путь представляет собой спираль, которая наматывается на точку O и гомотетична некоторой своей части относительно этой точки. Сможет ли муравей пройти весь свой путь за конечное время? Ответ обосновать.

7. Решить в целых числах уравнение

$$20x^3 - 14y^2 = 2014.$$

8. На доске после занятия осталась запись:

$$\text{«Вычислить } t(0) - t\left(\frac{\pi}{5}\right) + t\left(\frac{2\pi}{5}\right) - t\left(\frac{3\pi}{5}\right) + \dots + t\left(\frac{8\pi}{5}\right) - t\left(\frac{9\pi}{5}\right),$$

$$\text{где } t(x) = \cos 5x + * \cos 4x + * \cos 3x + * \cos 2x + * \cos x + * \text{»}.$$

Увидев ее, студент математического факультета сказал товарищу, что он может вычислить эту сумму, даже не зная коэффициентов (вместо них в нашей записи *). Не ошибается ли он? Ответ обоснуйте.